On the Mordel-Weil groups of quasi-elliptic surfaces

伊藤, 浩行

代数幾何学シンポジウム記録
1991年度　pp.129-137

On the Mordell-Weil groups of quasi-elliptic surfaces

東北大学理学部・伊藤　浩行 (HIROYUKI ITO)

0. 序

本稿では標数 2 及び 3 に特有の準楕円曲面の Mordell-Weil 群について、楕円曲面のことを念頭に起きながら調べてみた結果について述べる。後者に関しては塩田氏の Mordell-Weil 格子という素晴らしい理論があり、それを横目で見ながら、準楕円曲面の場合に楕円曲面での現象とどのくらい違いがあるかを考えてみる。特に標数が 2 と 3 の為、具体的計算が可能であり Mordell-Weil 群と Néron-Severi 群の構造、Artin invariant 等が実際に計算ができる。更に、§3 でふれるように楕円曲面の Mordell-Weil 群とは決定的に違う点も幾つかあることに注目していただきたい。

1. Mordell-Weil 群の定義

kを標数正の代数的閉体とし、標数を p で表す。$f: X \to C$をセクション Oを持つ準楕円曲面とする (従って標数 p は 2 又は 3)。

記号の準備

X_η : f の生成ファイバー

P_∞ : X_η の唯一つの特異点

$E := X_\eta - \{P_\infty\}$

$K = k(C)$: 曲線 Cの函数体

$R := \{c \in C | f^{-1}(v)$ は可約特異ファイバー $\}$

$$f^{-1} = \Theta_{v,0} + \sum_{i=1}^{m_v - 1} \mu_{v,i} \Theta_{v,i} \quad \text{既約分解}$$

$\Theta_{v,0}$: Oセクションと交わる唯一つの成分

m_v : $f^{-1}(v)$ の既約成分の個数

$NS(X)$: X の Néron-Severi 群

T : trivial 格子、即ち、O切断、一般ファイバー F、そして O切断と交わらないファイバーの既約成分で生成された Néron-Severi 群の部分格子。

$\chi = \chi(\mathcal{O}_X)$ と略記する。

このとき $E(K)$ を Eの K-有理点全体として、これに次の同型によって引き起こされる群構造を入れる。(cf. [3])

$$E(K) \simeq Pic^0_{X_\eta/K}(K) \tag{1.1}$$

定義. 上で定義した群構造のもとで、$E(K)$ を準楕円曲線の *Mordell-Weil* 群と呼ぶ。

ここで、上の群構造は X (又は X_η) を後で述べる Weierstrass form で書いたとき、それを標数 0 の体上の楕円曲線の群構造を mod p で考えたものと同じである。

以下、C を有理曲線と仮定する、即ち、$C \cong \mathbf{P}^1$。これは、X が単有理であることと同値である (cf. [4])。

定義-定理 1.1. $E(K)$ の群演算は、p 倍すると 0 になる。従って $E(K)$ は torsion 群である。特に、Xが単有理の仮定のもとで $E(K)$ は有限生成、従って、$E(K) \cong (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^{\oplus r}$ の形となる。このとき、この rを Xの *torsion-rank* と呼ぶ。

証明の概略: $E(K) \in P$が p 倍して 0 になることは、$Pic^0_{X_\eta/K}$が $\mathbf{G}_a$のフォームであることより従う。(フォームに関しては [3] を参照のこと。) $E(K)$ の有限生成性については、楕円曲面の場合と同様に次の同型により $NS(X)$ の有限生成性に帰着させる。

$$E(K) \simeq NS(X)/T \tag{1.2}$$

同型写像は X上の因子 Dに対して (1.1) の同型のもとで $D \cdot X_\eta - (D \cdot X_\eta)O$を対応させることにより得られ、逆は、$P \in E(K)$ に対し対応する Xの因子 (P) の mod Tを対応させて得られる。尚、この逆写像は次の写像から導かれる。

$$\varphi : E(K) \to NS(X) \otimes \mathbf{Q}$$

$$\varphi(P) = (P) - (O) - ((P - O) \cdot O)F - \sum_{v \in R} (\Theta_{v,1}, \cdots \Theta_{v,m_v - 1}) A_v^{-1} \begin{pmatrix} (\Theta_{v,1} \cdot P) \\ \vdots \\ (\Theta_{v,m_v-1} \cdot P) \end{pmatrix}$$

ここで、$(P{\cdot}O)$ は因子 (P) と (O) の交点数 $((P){\cdot}(O))$ を表し A_vはサイズ $(m_v - 1)$ の交点行列 $((\Theta_{v,i} \cdot \Theta_{v,j}))_{i,j \geqslant 1}$ である。(この写像に関しては [6] を参照のこと。) この写像から定義される $E(K)$ 上の Néron-Tate height を用いて $E(K)^0 = \{O\}$ が示される。(今の場合、$E(K)$ が torsion 群なので Néron-Tate height が自明であることに注意する。) ∎

また楕円曲面の $NS(X)$ の構造定理の準楕円曲面版も得られる。

定理 1.2. 単有理準楕円曲面の $NS(X)$ の生成元と関係式は次の通りである:

$$(O), F, \Theta_{v,i}\,(v \in R,\ 1 \leqslant i \leqslant m_v - 1), D_i = (P_i) - (O)\,(1 \leqslant i \leqslant r),$$

$$\text{関係式}: pD_i \approx p(D_i \cdot O)F + \sum_{v \in R} (\Theta_{v,1}, \cdots, \Theta_{v,m_v-1}) p A_v^{-1} \begin{pmatrix} (\Theta_{v,1} \cdot P) \\ \vdots \\ (\Theta_{v,m_v-1} \cdot P) \end{pmatrix} \quad (1 \leqslant i \leqslant r).$$

ここで, $P_1, \cdots P_r$は $E(K)$ の $\mathbf{F}_p$上のベクトル空間としての生成元である。

この定理、又は (1.2) より次の塩田-Tate の公式を得る。

系 1.3. ρでXの Picard 数を表すとき

$$\rho = 2 + \sum_{v \in R}(m_v - 1).$$

更に、同型 (1.2) の応用として次の式は大変有用である。

$$\det NS(X) \cdot |E(K)|^2 = \det T. \tag{1.3}$$

2. Weierstrass モデル

この§では、後で準楕円曲面の Mordell-Weil 群を計算する出発点となる Weierstrass 標準形について述べ、それを用いてファイバータイプを決定する。

定理 2.1. *(i)* $f :\to C$ を切断Oをもつ相対的極小な単有理準楕円曲面とする。このとき、Xはアフィン空間 $\mathbf{A}^3$内で次の式で定義される超曲面に双有理となる。

$$\begin{cases} y^2 = x^3 + \varphi(t)x + \psi(t) & with\, \varphi(t),\, \psi(t) \in k[t], \quad \varphi(t) \notin K^2\, or\, \psi(t) \notin K^2 \quad p = 2\text{ の時} \\ y^2 = x^3 + \varphi(t) & with\, \varphi(t) \in k[t] - k[t]^3 \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad p = 3\text{ の時} \end{cases} \tag{2.1}$$

(ii) 逆に、Kを 2次元代数函数体で、x, y, t で生成され、上の式 (2.1) の関係式を満たしているとする。Kが有理的でないとき、HをKの極小モデルとし、整数 m、及び、多項式$\Delta(t) \in k[t]$ を次で定義する。

$$\Delta(t) = \begin{cases} \varphi(t)\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 & p = 2\text{ の時} \\ \varphi'(t)^2 & p = 3\text{ の時} \end{cases}$$

$$m = \begin{cases} Max\,\{[\frac{1}{4}deg\,\varphi],\, [\frac{1}{6}deg\,\psi]\} & p = 2\text{ の時} \\ [\frac{1}{6}deg\,\varphi] & p = 3\text{ の時} \end{cases}$$

更に次を仮定する。

(ア) 標数が 2 のとき、$\varphi(t)$ は次数が 4 の倍数の項を含まず、$\psi(t)$ は次数が偶数の項を含まない。標数が 3 のとき、$\varphi(t)$ は次数が 3 の倍数の項を含まない。

(イ) αを$\Delta(t) = 0$ の任意の根としたとき、

$$\begin{cases} Min\,\{v_\alpha(\varphi) - 4, v_\alpha(\psi) - 6\} < 0 & p = 2\text{ の時} \\ v_\alpha(\varphi(t) - \varphi(\alpha)) < 6 & p = 3\text{ の時} \end{cases}$$

とする。このとき、

a)$m = 0$ ならば $\mathcal{L}$ は k上有理的、Kが有理的でなければ極小モデル Hが存在して

b)$m = 1$ ならば Hは (超特異)$K3$ 曲面、

c)$m > 1$ ならば Hは小平次元$\kappa = 1$ の曲面で、$p_a(H) = p_g(H) = m$, $dim\, H^1(H, \mathcal{O}_H) = 0$, $P_r(H) = r(m-1) + 1, r \in \mathbf{Z}$。

注意. 上の仮定 *(ア)*、*(イ)* は技術的な仮定で、適当な変数変換によりこの様に出来る。*(イ)* は方程式の *minimality* の条件である。

証明について:

前半 (i) は、楕円型 K-フォームの分類による。(cf. [3]) 後半は、$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$の分岐二重被覆を m について場合分けをして計算する。(cf.$p=2$ の時は [2]、$p=3$ の時は [4]) ただし、$p=2$ の時は注意が必要。

∎

証明の系として、上で定義した多項式$\Delta(t)$から$\Gamma(C, \mathcal{L}^{-12} \otimes \omega_C^2)$の元$\Delta$をつくることができ、これに対応する因子$(\Delta)$の次数について

$$\deg(\Delta) = 12\chi - 4 \tag{2.2}$$

を得る。

さて、準楕円ファイブレーション $f: X \to C$の可約特異ファイバーのタイプの分類のために、今、Cを局所的とする。即ち、$C \cong \operatorname{Spec} k[[t]]$。このとき Xは次の局所 Weierstrass 形式で書ける；

$$\begin{cases} y^2 = x^3 + (\alpha^4 t^{2s} + \beta^2 t^m)x + \gamma^2 t^k & p = 2\text{の時} \\ y^2 = x^3 + \delta t^n & p = 3\text{の時} \end{cases} \tag{2.3}$$

ここで、s, m, kは奇数又は 0、n は 3 と互いに素、$\alpha, \beta, \gamma, \delta$は $k[[t]]$ の可逆元で、s, m 又は kが 0 のときはそれぞれに対応する係数を 0 とする。また、$p=2$ の時は

$$\begin{cases} \beta \neq 0\text{又は}\gamma \neq 0 \\ s = 1\text{又は}1 \leqslant m \leqslant 3\text{又は}1 \leqslant k \leqslant 5, \end{cases}$$

$p=3$ の時は

$$1 \leqslant n \leqslant 5$$

とできる。(2.3) を用いてファイバーを分類するが、今の場合は

$$\Delta(t) = \begin{cases} (\beta^2 t^{m-1})^2(\alpha^4 t^{2s} + \beta^2 t^m) + (\gamma^2 t^{k-1})^2 & p = 2\text{の時} \\ (\delta t^{n-1})^2 & p = 3\text{の時} \end{cases}$$

である。

命題 2.2. 各 p に対して特異ファイバーは次の通り：

(i) $p=2$ の時　　(1)$m \geqslant k \neq 0$又は$m = 0$　　　(2)$k > m \neq 0$又は$k = 0$

type	$v_t(\Delta(t))$	k	s	type	$v_t(\Delta(t))$	m	s
II	0	1	$\geqslant 0$	III	1	1	$\geqslant 0$
I_0^*	4	3	$\geqslant 0$	III^*	7	3	$\neq 1$
II^*	8	5	$\neq 1$	I_{2m-4}^*	$2m$	$\geqslant 3$	1
I_{2k-6}^*	$2k-2$	$\geqslant 5$	1				

(ii) $p=3$ の時

type	$v_t(\Delta(t))$	n
II	0	1
IV	2	2
IV^*	6	4
II^*	8	5

ここで v_t は $v_t(t)=1$ となる正規付値とする。

この命題をグローバルな場合に適用して、(2.2) より次を得る。

命題 2.3. タイプ T に対して $\nu(T)$ でタイプ T のファイバーの個数を表すとき、次が成り立つ。

$$12\chi - 4 = \begin{cases} \Sigma_{k\geqslant 0}(2k+4)\nu(I_{2k}^*) + 8\nu(II^*) + \nu(III) + 7\nu(III^*) & p=2\text{の時} \\ 2\nu(IV) + 6\nu(IV^*) + 8\nu(II^*) & p=3\text{の時} \end{cases} \tag{2.4}$$

一方、ファイバーの交点行列の計算より

$$\det T = \begin{cases} -2^{\Sigma_{k\geqslant 0}2\nu(I_{2k}^*)+\nu(III)+\nu(III^*)} & p=2\text{の時} \\ -3^{\nu(IV)+\nu(IV^*)} & p=3\text{の時} \end{cases}$$

であり、しかも上の命題よりこれらのべきの部分は偶数であることが分かるので、§1 で用いた同型 (1.2) より、$|\det NS(X)|$ は p の偶数べき $p^{2\sigma_0}(\mathbb{Z} \ni \sigma_0)$ と書けることがわかる. 従って、このべきの部分を見て次を得る。

命題 2.4.

$$\sigma_0 + \tau = \begin{cases} \frac{1}{2}\{\Sigma_{k\geqslant 0}2\nu(I_{2k}^*) + \nu(III) + \nu(III^*)\} & p=2\text{の時} \\ \frac{1}{2}\{\nu(IV) + \nu(IV^*)\} & p=3\text{の時} \end{cases} \tag{2.5}$$

注意. 上の σ_0 は X が超特異 $K3$ 曲面の時、*Artin invariant* と呼ばれ超特異 $K3$ 曲面のモジュライを考える際重要な役割を果たす。

§1 で注意したように $E(K)$ 上 Néron-Tate height は自明なので、次の関係を得る.

命題 2.5. $P \in E(K)$ に対して、

$$2(P\cdot O) + 2\chi \leqslant \begin{cases} \frac{1}{2}\nu(III) + \frac{3}{2}\nu(III^*) + \Sigma_{k\geqslant 0}(1+\frac{b}{4})\nu(I_b^*) & p=2\text{の時} \\ \frac{1}{3}\nu(IV) + \frac{2}{3}\nu(IV^*) & p=3\text{の時} \end{cases}$$

この式は実際に有理点を計算する際に役に立ち、また、切断とファイバーの交わり方に関する項を付けて等式にすることができ、切断とファイバーのコンフィグレーションを決める際に役に立つ。

3. $E(K)$ 及び $NS(X)$ の分類

Xが特に有理曲面、K3 曲面の場合について考える。出発点は Weierstrass 形式 (2.1) で、道具は§2 の命題達、特に式 (2.4)、(2.5)、(2.6) である。(勿論、具体的な計算が大変多い。)

(1)X が有理曲面の時

このとき各不変量は、$\chi = 1$、$\rho = 10$、$\sigma_0 = 0$ であり、Weierstrass 形式は

$$(3.1)\qquad \begin{cases} y^2 = x^3 + (a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t)x + b_5t^5 + b_3t^3 + b_1t & p = 2 \text{ の時} \\ y^2 = x^3 + a_5t^5 + a_3t^3 + a_1t & p = 3 \text{ の時}, \end{cases}$$

(2.4)、(2.5) は

$$\begin{cases} 8 = \Sigma_{k=0}^{2}(2k+4)\nu(I_{2k}^{*}) + 8\nu(II^{*}) + \nu(III) + 7\nu(II^{*}) & p = 2 \text{ の時} \\ 4 = \nu(IV) + 3\nu(IV^{*}) + 4\nu(II^{*}) & p = 3 \text{ の時} \end{cases}$$

$$r = \begin{cases} \frac{1}{2}\left\{\Sigma_{k=0}^{2} 2\nu(I_{2k}^{*}) + \nu(III) + \nu(III^{*})\right\} & p = 2 \text{ の時} \\ \frac{1}{2}\left\{\nu(IV) + \nu(IV^{*})\right\} & p = 3 \text{ の時} \end{cases}$$

となる。つまり、torsion-rank はファイバーのタイプの組み合わせで決まるので、ファイバーのタイプを決定すればよい。(これは、(3.1) より得られる$\Delta(t)$ の根の重複度を込めた組み合わせを決定することである。)

定理 3.1. 準楕円有理曲面は次の表のいずれかに同型であり、その *torsion-rank*、有理点は表の通りである。

表 1

(i)p=2 の時

The type of reducible fibles.	The standard form.	r	nonzero sections
a)II^{*}	$y^2 = x^3 + t^5$	0	
b)I_4^{*}	$y^2 = x^3 + t^2x + t^5$	1	$(t^2 + t, t^3)$
c)III, III^{*}	$y^2 = x^3 + t^3x$	1	$(0,0)$
d)two I_0^{*}'s	$y^2 = x^3 + at^2x + t^3$ with $a \in k$	2	$(ut, 0)$ with $u^3 + au + 1 = 0$
e)I_2^{*}, two III's	$y^2 = x^3 + (t^3 + t)x$	2	$(0,0)$ $(t+1, t^2+1)$ (t^2+t, t^3+t)
f)I_0^{*}, four III's	$y^2 = x^3 + (t^3 + at^2 + t)x$ with $a \in k^{*}$	3	$(0,0)$ $(a^{\frac{1}{2}}t, a^{\frac{1}{4}}(t^2+t))$ $(a^{-\frac{1}{2}}(t^2 + at + 1), a^{-\frac{3}{4}}(t^3 + (a+1)t^2 + (a+1)t + 1))$ $(u^{-1}t^2 + ut, u^{-\frac{3}{2}}(t^3 + a^{\frac{1}{2}}ut^2 + u^2t))$ $(ut + u^{-1}, u^{\frac{1}{2}}(t^2 + a^{\frac{1}{2}}u^{-1}t + u^{-2}))$ with $u^2 + a^{\frac{1}{2}}u + 1 = 0$

g)eight III's	$y^2 = x^3 + (t^3 + at^2 + bt)x + t^3$ with $a \in k$ and $b \in k^*$	4	$(ut, u^{\frac{1}{2}}(t^2 + b^{\frac{1}{2}}t))$
			$(u^{-1}t^2 + ut + bu^{-1},$
			$u^{-\frac{3}{2}}(t^3 + (b + au^2)^{\frac{1}{2}}t^2 + (b^2 + abu^2)t + b^{\frac{3}{2}}))$
			with $u^3 + au + 1 = 0$
			$(v^{-1}t^2 + vt, v^{-\frac{3}{2}}(t^3 + a^{\frac{1}{2}}vt^2 + b^{\frac{1}{2}}v^2t))$
			$(vt + bv^{-1}, v^{-\frac{3}{2}}(v^2t^2 + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}vt + b^{\frac{3}{2}}))$
			with $v^4 + av^2 + v + b = 0$
			$(t^2/(t^2 + b), (a^{\frac{1}{2}}t^4 + t^3 + a^{\frac{1}{2}}bt^2)/(t + b^{\frac{1}{2}})^3)$

(ii)p=3 の時

The type of reducible fibles.	The standard form.	r	nonzero sections
a)II^*	$y^2 = x^3 + t$	0	
b)IV, IV^*	$y^2 = x^3 + t^2$	1	$(0, \pm t)$
c)four IV's	$y^2 = x^3 + t^4 + t^2$	2	$(-t, \pm(t^2 + t))$
			$(t, \pm(t^2 - t))$
			$(t^2, \pm(t^3 - 1))$
			$(1, \pm(t^2 - 1))$

注意. *(2.6)* を個々について計算することによって、切断同志が交わるのは、*p=2* の *g)* の場合だけであることが分かる.

この表をもとに、それぞれの場合について切断とファイバーの構成を図に書くことができ、また、その中の 9 本の (-1)-曲線をブローダウンして $\mathbf{P}^2$ からの構成を見ることができる。(cf. [1],[2])

(2)X が $K3$ 曲面の時

X は、単有理を仮定しているので超特異 $K3$ 曲面となる. 従って Artin 不変量 σ_0 は $p = 2$ の時 $1 \leqslant \sigma_0 \leqslant 9$、$p = 3$ の時 $1 \leqslant \sigma_0 \leqslant 5$ となり、$\chi = 2$、$\rho = 22$ となる.

定理 3.2. *([1])* $p = 3$ の場合は特異ファイバーのタイプの組み合わせと、*torsion-rank* を決定できた。

分類によると、torsion-rank は $0 \leqslant r \leqslant 4$、$1 \leqslant \sigma_0 \leqslant 5$ である。特に、(2.4) により可能な特異ファイバーのタイプの組み合わせすべてが実際に存在する。(K3 曲面の場合は 8 通り。) これについて、$p = 3$ の場合は更に次のことが言える。

定理 3.3. 整数 $\chi > 0$ を任意に与えた時、*(2.4)* で $\nu(*)$ を変数とみた不定方程式を解いて得られる解すべてを実現する単有理準楕円曲面 $f : X \to C$ が存在する。

注意. $p = 2$ の時は $K3$ 曲面で既に不定方程式 *(2.4)* の解であって、実際には存在しないファイバーのタイプの組み合わせがある。

有理曲面の時と同様に、ファイバーと切断のコンフィグレーションを図に書くことができる。([1]) 尚、標数 2 の場合については現在計算中である。

さて、超特異 $K3$ 曲面の Néron-Severi 群 $NS(X)$ は Artin 不変量σ_0によって一意的に格子構造が決まる。(cf. [5] 参照) また定理 1.2 より $NS(X)$ は

$$\begin{cases} r = 0 \text{ の時} & NS(X) = U_2 \oplus \bigoplus_{v \in R} Q(F_v) \\ r > 0 \text{ の時} & NS(X) = < O,\ F,\ P_1, \cdots P_r,\ \Theta_{v,i}\ (v \in R,\ 1 \leqslant i \leqslant m_v - 1) > / \{\text{関係式}\} \end{cases}$$

となることがわかるので切断とファイバーの構成がわかれば格子の生成元も決定できる。ここで, $Q(F_v)$ は v上の特異ファイバー F_vから決まる格子を表す。

(3)X が特別な場合

楕円曲面と大きく違うのは、適当にχを大きくするとこの torsion-rank がいくらでも大きくなる曲面が作れる点である。これについては、n を正の整数として次のアフィン方程式で定義される準楕円曲面を考えるとよい。

$$\begin{cases} y^2 = x^3 + t^{2^{n+1}+1} + t^3 & p = 2 \text{ の時} \\ y^2 = x^3 + t^{3^n+1} + t^2 & p = 3 \text{ の時} \end{cases}$$

このとき、$R = \mathbf{P}^1_{\mathbf{F}_{p^n}}$ で、特異ファイバーはすべて $I_0^*(p = 2$ の時$)$, $IV(p = 3$ の時$)$ となり、$p = 2$ の時 n が奇数ならば$\chi = (2^{n+1} + 2)/6$、偶数ならば$\chi = (2^{n+1} + 2^2)/6$、$p = 3$ の時は$\chi = (3^n + 3)/6$ である。これらのファイバーの入れ換え、即ち、$R = \mathbf{P}^1_{\mathbf{F}_{p^n}}$ の自己同型 $\mathrm{Aut}(\mathbf{P}^1_{\mathbf{F}_{p^n}}) = \mathrm{PGL}(2, p^n)$ が $E(K)$ に作用して多くの切断をつくることになる。例えば $p = 3$ の時は、αを 1 の原始 p^n乗根として、

$$E(K) \ni P = (t^{2\cdot 3^{n-1}}, t^{3^n} - t)$$

$$\mathrm{Aut}(\mathbf{P}^1_{\mathbf{F}_{p^n}}) \ni \sigma_\alpha : t \mapsto 1/t \text{ と } t \mapsto t + \alpha \text{の合成}$$

とすると、$\sigma_\alpha(P), \sigma_\alpha^2(P), \cdots, \sigma_\alpha^{p^n}(P) = P$はすべて異なる $E(K)$ の元である。実際σ_αは $t = \infty$ 上のファイバーを $t = \alpha$上へ写し、一方 Pは $t = \infty$ 上のファイバーで O切断と (multiplicity は$\chi - 1$ で) 交わり、その他の特異ファイバーでは O切断の通るコンポーネント$\Theta_{v,0}$とは交わらないので,、$\sigma_\alpha^l(P)$ は O切断と $t = \alpha^l$ 上のファイバーでのみ交わる。$p = 2$ の時も

$$P = (t^{2^{q-1}} + t, t^{3\cdot 2^{q-2}} + t^{2^{q-1}+1})$$

をとりσ_αにつては同じものをとると同様のことが言える。

従って

定理 3.4. *torsion-rank* は有界ではない。

序で述べた通りこれは楕円曲線の場合と決定的に違う点である。

REFERENCES

1. Ito H., *The Mordell-Weil groups of unirational quasi-elliptic surfaces in characteristic 3*, Math.Z. (to appear).
2. Ito H., in preparation.
3. Kambayashi T, Miyanishi M. and Takeuchi M, "Unipotent Algebraic Groups," Lecture Note in Math. Vol.414, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1974.
4. Miyanishi M., *Unirational quasi-elliptic surfaces*, Japan.J.Math. **3** (1977), 395–416.
5. Rudakov A.N.,Shafarevich I.R., *Surfaces of type K3 over fields of finite characteristic*, J.Soviet Math. **22** (1983), 1476-1533.
6. Shioda T., *Mordell-Weil lattices and Galois representation I,II,III*, Proc.Japan Acad. **65A** (1989), 268-271;296-299;300-303.